

Capítol 5 : Grafs eulerians i grafs hamiltonians

Matemàtica discreta
Grau d'Enginyeria Informàtica
Escola d'Enginyeria
Universitat Autònoma de Barcelona

- 1 Introducció
- 2 Camins i circuits eulerians
- 3 Mètode de Hierholzer
- 4 El problema del carter xinès
- 5 Camins i circuits hamiltonians
- 6 El problema del viatjant

Molts problemes de planificació:

- recollida d'escombraries,
- repartiment de cartes,
- inspecció de canonades,
- sortida de laberints, etc.

es poden plantejar com a problemes d'optimització de recorreguts.

Estudiarem dos problemes clàssics d'optimització de recorreguts:

- els que passen per **totes les arestes (arcs) d'un graf una sola vegada**,
- els que passen per **tots el vèrtexs d'un graf una sola vegada**.

Tot i que es tracta de problemes similars veurem que des del punt de vista de la seva complexitat són molt diferents:

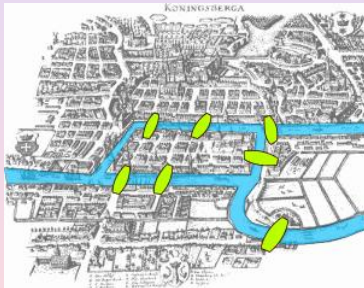
- el primer cas, és un problema "fàcil", tractable;
- mentre que el segon és un problema intractable.

Més endavant veurem el **problema del viatjant**, un dels exemples bàsics de la classe de **problemes NP** (intractables).

Camins i circuits eulerians

El problema dels set ponts de Königsberg (Euler, 1736)

Els **set ponts de Königsberg** és un famós problema matemàtic que va donar origen a la teoria de grafs. Königsberg és l'actual Kaliningrad (Rússia) (fou alemanya fins a la fi de la II Guerra Mundial) i per ella hi passa el riu Pregolya. Enmig del riu, dues grans illes estaven connectades entre elles i a les ribes mitjançant una estructura de set ponts en total. Per tal d'organitzar una desfilada, els habitants de la ciutat es van plantejar si era possible recórrer els set ponts de manera que només es passés un sol cop per cadascun d'ells.

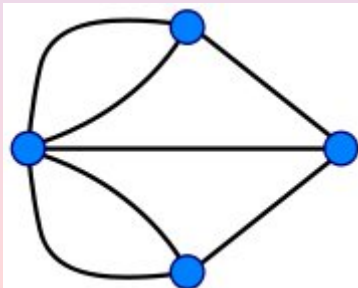


Fons: http://ca.wikipedia.org/wiki/Els_set_ponts_de_Konigsberg
<http://ca.wikipedia.org/wiki/Kaliningrad>

Camins i circuits eulerians

El 1736, el matemàtic suís Leonhard Euler va demostrar que no era possible en *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Es considera que aquest problema va donar origen a la teoria de grafs, el desenvolupament de la qual va permetre grans avenços en combinatòria i topologia.

Euler va fer una abstracció dels elements que defineixen el problema (ponts i ribes) i substituint **les ribes per nodes (vèrtexs)** i **els ponts per línies (arestes)** que unien els nodes. Aquesta estructura és el que avui anomenem graf.



Euler va adonar-se que el problema podia ser resolt en funció del grau dels nodes.

Euler va provar que el recorregut desitjat només era possible si el nombre de nodes de grau senar era 0 o 2.

Si no hi havia nodes de grau senar es podia fer un recorregut tancat, amb inici i final en el mateix punt.

I si hi havia dos nodes de grau senar llavors aquests eren els extrems del camí.

En un **(multi)graf simètric connex**:

Definició 1 (Circuit eulerià).

*Un **circuit eulerià** és un circuit que passa per totes les arestes del graf **una vegada i només una**. És a dir, un circuit simple que conté totes les arestes.*

Definició 2 (Camí eulerià).

*Un **camí eulerià** és un recorregut que conté totes les arestes del graf **una sola vegada**.*

Direm que un **graf és eulerià** si admet un circuit eulerià.

Teorema 1.

Donat $G(V, A)$, un (multi)graf simètric i connex:

- (i) G té **circuit eulerià** si i només si tots els vèrtexs tenen grau parell.*
- (ii) G té **camí eulerià** si i només si el nombre de vèrtexs amb grau senar és 0 o 2.*

Corol·lari 1.

Donat un graf $G(V, A)$, simètric i connex, G és eulerià si i només si es pot fer una partició de les arestes del graf en circuits disjunts d'arestes.

Obtenció d'un circuit eulerià

El següent algorisme (Hierholzer) permet obtenir un circuit eulerià C_e a partir d'un graf simètric G .

Algorithm 1 HIERHOLZER($G(V, A)$)

Require: Un graf eulerià simètric G (opcionalment un vèrtex d'inici s).

Ensure: Un circuit eulerià C_e .

- 1: $G_{aux}(V, A) \leftarrow G(V, A)$
 - 2: $v \leftarrow PrimerVertex(G_{aux})$
 - 3: $C_e \leftarrow \{v\}$
 - 4: **while** $V \neq \emptyset$ **do**
 - 5: $v \leftarrow VèrtexAmbArestes(G_{aux}, C_e)$
 - 6: $C \leftarrow Circuit(G, v)$
 - 7: $C_e \leftarrow Concatenar(C_e, C, v)$
 - 8: $G_{aux} \leftarrow G_{aux} - C$
 - 9: **end while**
 - 10: **return** C_e
-

$\text{PrimerVertex}(G_{aux})$ retorna un vèrtex de grau parell.

$\text{VèrtexAmbArestes}(G, C)$ retorna el primer vèrtex de C que té arestes a G .

$\text{Circuit}(G, v)$ retorna un circuit construït en el graf G a partir del vèrtex v . Cal anar prenent arestes fins que no es pugui continuar.

$\text{Concatenar}(C_e, C, v)$ retorna el circuit que s'obté de substituir una aparició de v en el circuit C_e per tot el circuit C .

$G - C$ elimina de G els vèrtexs que formen part del circuit C .

Remarca 1.

Noteu que el que fa l'algorisme és crear circuits disjunts d'arestes.

Anàlisi de l'algorisme

Siguin $n = |V|$ i $m = |A|$ per $G(V, A)$:

$\text{VèrtexAmbArestes}(G, C)$ Podem començar a cercar el vèrtex pel darrer punt del circuit on havíem fet la darrera cerca.

D'aquesta manera, totes les cerques comporten, com a molt, mirar un cop cada aresta del circuit C_e i, per tant, la seva complexitat és $O(m)$ en total.

$\text{Circuit}(G, v)$ Com que acabarem afegint un cop cada aresta a un dels circuits, la complexitat total de totes les execucions també serà $O(m)$.

$\text{Concatenar}(C_e, C, v)$ Temps constant.

$G - C$ Es podria incloure a **Circuit(G, v)** (treure una aresta de G i posar-la a C).

Per tant la **complexitat total** serà $O(m)$.

El problema del carter xinès (*Chinese postman problem, CPP*), fou formulat pel matemàtic xinès Guan Meigu (Mei-ko Kwan) (1962).

Un carter ha de repartir cartes pels carrers assignats amb el **menor cost possible** (bé sigui en temps, distància, etc.), de manera que:

- (i) El carter ha de recórrer tots els carrers.
- (ii) La ruta comença i acaba en el mateix punt (l'oficina de correus).

Algorisme d'Edmonds

Solució per a $G(V, A)$ un multigraf simètric (Edmonds).

Algorithm 2 EDMONS($G(V, A)$)

Require: Un graf simètric G (opcionalment un vèrtex d'inici s).

Ensure: Un circuit eulerià de cost mínim C_e sobre un multigraf.

- 1: Trobar el subconjunt de vèrtexs $V_s \in V$ de grau senar de G .
 - 2: Trobar els camins de cost mínim entre cada parella de vèrtexs de V_s (Floyd).
 - 3: Seleccionar els $\frac{|V_s|}{2}$ camins que connecten dos a dos els vèrtexs de V_s amb cost total mínim.
 - 4: Duplicar a G les arestes d'aquests camins i obtenir el multigraf G_s .
 - 5: Aplicar l'algorisme de Hierholzer sobre G_s i construir un circuit eulerià C_e .
 - 6: **return** C_e
-

Remarca 2.

El circuit C_e obtingut és el recorregut de cost mínim que cerquem.

Remarca 3.

*El nombre de vèrtexs de grau senar, $|V_s|$, sempre és parell, ja que d'altra forma no es compliria el **Teorema dels graus**, pel qual el nombre de vèrtexs de grau senar en tot graf sempre és parell.*

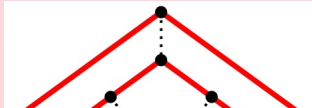
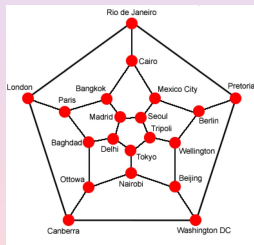
Remarca 4.

En el pas 3 seleccionem els camins tals que:

- a) Ens cobreixen tots els vèrtexs de V_s , és a dir, els camins seleccionats han de tenir com a extrems tots els vèrtexs del conjunt (dos a dos i sense repetir-ne cap).*
- b) Ens permeten convertir els vèrtexs de grau senar a grau parell.*

Camins i circuits hamiltonians

L'origen dels grafs hamiltonians es remunta a l'any 1857 quan el matemàtic irlandès *W.R. Hamilton* va presentar i patentar un joc de taula (*icosian game*) en què calia seguir un recorregut tancat sense repetició de vèrtexs, seguint les arestes d'un dodecàedre regular.



Posteriorment, a partir d'aquest es va comercialitzar un joc anomenat *Around the World* on es plantejava el problema com el recorregut d'un viatjant.

La solució que Hamilton va proposar utilitzant l'*Icosian Calculus* no es pot generalitzar sobre grafs arbitraris.

En un graf $G(V, A)$, connex:

Definició 3 (Camí hamiltonià).

*Un recorregut obert és un **camí hamiltonià** si passa per tots els vèrtexs del graf sense repetir-ne cap.*

Definició 4 (Circuit hamiltonià).

*Un **circuit hamiltonià** és un circuit que passa per tots els vèrtexs del graf sense repetir-ne cap i permet tornar al vèrtex inicial.*

Si un graf admet un circuit hamiltonià direm que el **graf és hamiltonià**.

Donat un graf qualsevol com podem decidir si té un circuit hamiltonià?

Aquesta pregunta és similar a la que ens feiem en el cas dels circuits eulerians, i n'esperaríem una resposta similar, però la resposta és: amb molta dificultat.

Teorema 2 (Teorema de Garey-Johnson (1983)).

Decidir si un graf té un circuit hamiltonià és un problema NP-Comple.

Què vol dir NP-Complet?

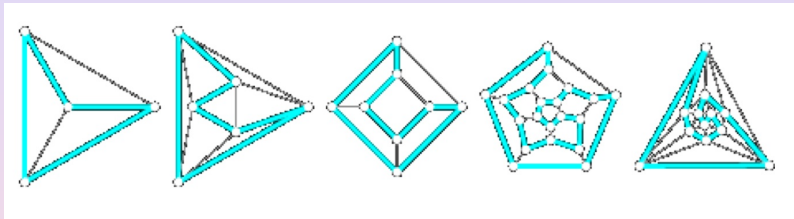
Un problema NP-Complet és un cas particular de problema **intractable**: hi ha algorismes que resolen el problema però són ineficients i, per tant, són incapaços de trobar la solució en un temps raonable quan tenim instàncies de mida relativament gran. Si un problema és NP-Complet, llavors no es coneix cap algorisme eficient que el resolgui.

En un problema NP-Complet és fàcil verificar que una solució és correcta.

Hi ha milers de problemes NP-Complet.

Camins i circuits hamiltonians

Els **cinc poliedres regulars** són hamiltonians.



Els **sòlids platònics**,

http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid, considerats com a grafs són hamiltonians.

Un **graf complet** amb més de dos vèrtexs és hamiltonià.

Els **grafs cicles** són hamiltonians.

Remarca 5.

Tot circuit hamiltonià es pot convertir en un camí hamiltonià eliminant una aresta.

Remarca 6.

Un camí hamiltonià es pot convertir en un circuit hamiltonià si els dos extrems del camí són adjacents.

A diferència dels grafs eulerians, no disposem de condicions necessàries i suficients que ens permetin decidir que un graf qualsevol és hamiltonià.

Sí que es poden trobar algunes condicions necessàries de hamiltoneïtat i també, de forma independent, se'n poden trobar de suficients per a casos particulars.

Intuïtivament podem entendre que quan més dens és un graf més possibilitats té de ser hamiltonià.

Teorema 3.

Sigui $G(V, A)$ un graf connex i pla que conté un circuit hamiltonià H i siguin R_j i R'_j el nombre de regions de G que queden dins i fora d' H , respectivament, i estan delimitades per j arestes. Es verifica que:

$$\sum_{j \geq 2} (j - 2)(R_j - R'_j) = 0$$

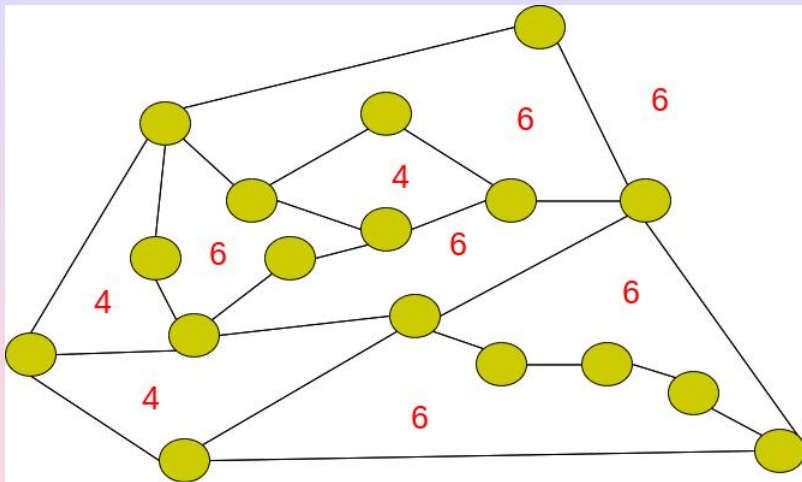
Remarca 7.

Aquesta condició és necessària.

Remarca 8.

Aquest teorema normalment s'utilitza per demostrar que un cert graf pla no conté circuit hamiltonià.

Camins i circuits hamiltonians



Teorema 4.

Si $G(V, A)$ un graf hamiltonià llavors,

*(i) G és **connex** i tots els seus vèrtexs tenen grau major o igual a 2.*

*(ii) G és **2-connex**. És a dir, no té articulacions.*

(iii) Per a tot subconjunt $S \subset V$, amb $S \neq \emptyset$, es verifica que el nombre de components de G després d'eliminar els vèrtexs de S és menor o igual que $|S|$.

*(iv) Si G és **bipartit** aleshores $|V_1| = |V_2|$.*

Remarca 9.

Aquestes condicions són necessàries.

Corol·lari 2.

Un graf amb algun vèrtex de grau 1 no potser hamiltonià. Per tant els arbres no són hamiltonians.

Sigui $G(V, A)$ un graf simètric.

Teorema 5.

*Si G és **complet**, amb $|V| \geq 3$, llavors té circuit hamiltonià.*

Teorema 6.

Si $|V| \geq 3$ i per tota parella de vèrtexs no adjacents u, v es verifica que $|\Gamma(u)| + |\Gamma(v)| \geq |V|$, llavors G és hamiltonià.

Corol·lari 3.

Si G és connex i simètric amb $|V| = n > 2$ i $|\Gamma(v)| \geq \frac{n}{2} \quad \forall v \in V$, llavors és hamiltonià.

Remarca 10.

Aquestes condicions són suficients.

Obtenció de camins i circuits hamiltonians

Per determinar un recorregut hamiltonià sobre un graf aplicarem l'**algorisme de Roberts i Flores**.

Es basa en el **backtracking** i dona com a resultat un únic circuit (camí) hamiltonià, si n'hi ha algun.

Cal construir una matriu M de k files i n columnes, $M_{k \times n} = m_{ij}$, indexada pels vèrtexs en les columnes.

Per a cada vèrtex $v \in V$ la corresponent columna conté el seu conjunt de veïns, $\Gamma(v)$ és a dir, m_{ij} és l' i -èsim veí de v_j .

El circuit (camí) hamiltonià es forma progressivament com una llista ordenada C_h , a partir del recorregut de M .

Algorithm 3 ROBERTS I FLORES (I)($G(V, A)$)

- 1: Escollim un vèrtex inicial v_1 . A partir de la matriu M , el primer vèrtex v_i de la columna de v_1 s'afegeix a C_h .
 - 2: El primer vèrtex no utilitzat abans, v_j de la columna corresponent v_i a s'incorpora a C_h .
 - 3: Així successivament...
 - 4: Si en algun moment no podem continuar cal treure de C_h el darrer vèrtex afegit (backtracking) i substituir-lo pel primer vèrtex possible en la mateixa columna.
 - 5: El procés s'acaba quan obtenim circuit (camí) o quan ja no podem continuar.
-

El **problema del viatjant** (**Traveling Salesman Problem, TSP**) és un dels problemes més populars de tots els que s'han plantejat sobre grafs (<http://www.tsp.gatech.edu/index.html>). El plantejament del problema és el següent:

Un viatjant surt d'una població **A** i ha de visitar diverses ciutats per vendre els seus productes. El viatjant té dues alternatives:

- (a) Trobar un recorregut amb origen i final a **A** que visiti **un únic cop** cada ciutat i tingui cost total mínim.
- (b) Trobar un recorregut amb origen i final a **A** que visiti **com a mínim un cop** cada ciutat i tingui cost total mínim.

El problema del viatjant

El cost és, generalment, la distància, per exemple, en quilòmetres. Pot tenir en compte, també, altres valors: el recorregut més ràpid, el recorregut més econòmic (per exemple, evitant peatges), ...

Podem dir que el TSP és en els grafs hamiltonians, l'equivalent al problema del carter xinès en els grafs eulerians.

La diferència és que el TSP és un problema NP-Hard (tant o més difícil que determinar si un graf és hamiltonià).

El problema del viatjant

En termes de grafs el problema es planteja a partir d'un graf $G(V, A)$ amb costos a les arestes.

L'alternativa **(a)** es coneix com el **TSP** i consisteix a trobar un circuit que passi un únic cop per cada vèrtex i tingui cost total mínim. És a dir, cal trobar un circuit hamiltonià de cost mínim.

L'alternativa **(b)** es coneix com el **TSP generalitzat** i consisteix en trobar un circuit que passi **com a mínim un cop** per cada vèrtex i tingui cost total mínim.

Donat un graf G , determinar si conté un circuit hamiltonià és un problema NP-Complet.

Si tenim un algorisme que resol eficientment el TSP, aleshores, podem obtenir un algorisme que determini eficientment si G és hamiltonià

A partir de G construïm G' , complet, afegint arestes de cost infinit (molt gran) entre cada parell de vèrtexs no veïns.

Troblem un circuit hamiltonià (H) de cost mínim a G' .

Si H té cost diferent d'infinit llavors G és hamiltonià.

Conclusió: el TSP és NP-Hard (tant o més difícil que determinar si G és hamiltonià).

Si el graf G sobre el que volem aplicar el TSP és petit llavors és possible trobar una solució òptima mitjançant un **mètode exacte**.

Però si el graf no és petit, els mètodes exactes poden trigar molt a trobar una solució òptima i per tant no els podem utilitzar.

En aquests casos ens hem de conformar en trobar una solució aproximada mitjançant un **mètode heurístic**.

Mètodes heurístics

Utilitzen estratègies que es basen en observacions, a voltes intuïtives, que acostumen a donar bon resultats.

Per exemple, per al TSP en un graf complet:

Una estratègia podria ser anar sempre al vèrtex no visitat que està més proper (què passa si ens allunyem massa?).

Partir d'un vèrtex aïllat, mantenim sempre un circuit al qual anirem afegint vèrtexs, fins que hi siguin tots. El nou vèrtex s'afegeix al circuit entre dos vèrtexs en la posició més favorable possible.

Afegim abans el vèrtex que fa créixer menys el cost del circuit.

Algorismes d'aproximació

Són mètodes heurístics que proporcionen una fita sobre l'error màxim que pot tenir la solució aproximada que retornen (raó d'aproximació).

Per exemple, si un algorisme té raó d'aproximació 2 voldrà dir que la solució que retorna té, com a molt, un cost igual al doble de la solució òptima.

No tots els problemes d'optimització intractables admeten algorismes d'aproximació.

N'hi ha que està demostrat que no en tenen. Per exemple, el TSP quan el graf no compleix la **desigualtat triangular**.

A la pràctica, podria donar-se el cas en què un mètode heurístic que no és d'aproximació acostumi a donar millors resultats que d'altres que ho són.

Treballarem sobre un graf complet que compleix la desigualtat triangular.

Definició 5.

Un graf $G(V, A)$ compleix la desigualtat triangular si el cost del camí per anar d'un vèrtex v a un altre u passant per un tercer s , no millora el cost d'anar-hi directament. És a dir,

$$\text{cost}(v, u) \leq \text{cost}(v, s) + \text{cost}(s, u) \quad \forall s, u, v \in V$$

Per exemple, anar de Barcelona a Girona directament no pot tenir un cost superior a anar-hi passant per Sabadell.

Remarca 11.

Notem que per tal d'acomplir la desigualtat triangular el graf ha de ser complet.

Aquest mètode està basat en l'aparellament perfecte de cost mínim.

Algorithm 4 $\text{TSP}(G(V, A))$

Require: Un graf complet G que verifica la desigualtat triangular

- 1: Construir un arbre generador de cost mínim, T .
 - 2: Sigui $V_s(T)$ el subconjunt de vèrtexs de grau senar de T .
 - 3: Sigui $M_s(G)$ el subconjunt d'arestes que permeten connectar de dos en dos els vèrtexs de $V_s(T)$ de manera òptima a G .
 - 4: Afegir o duplicar a T les arestes de $M_s(G)$ per obtenir un graf T_{M_s} .
 - 5: Trobar un circuit eulerià C_e a T_{M_s} .
 - 6: La solució aproximada pel TSP H_a s'obté prenent els vèrtexs de G segons l'ordre d'aparició a C_e .
-

Teorema 7.

Sigui H_o la solució òptima al TSP i sigui H_a l'obtinguda en el mètode precedent. Aleshores,

$$cost(H_a) < \frac{3}{2} cost(H_o)$$

TSP generalitzat

Si el graf no compleix la desigualtat triangular llavors no hi ha algorismes d'aproximació per al TSP.

Si que hi ha, però, algorismes d'aproximació per al **TSP generalitzat**, independentment de si el graf compleix la desigualtat triangular.

Notem que, si el graf compleix la desigualtat triangular, hi haurà, com a mínim, una solució del TSP generalitzat que és un circuit hamiltonià.

Algorisme d'aproximació per al TSP generalizat

Algorithm 5 TSP GENERALITZAT($G(V, A)$)

Require: Un graf G

- 1: Construir el graf distància D de G .
 - 2: D és el graf complet tal que cada aresta té cost igual al cost del camí de cost mínim a G dels dos vèrtexs que relaciona. D compleix la desigualtat triangular.
 - 3: Trobar a D una solució aproximada al TSP fent servir l'algorisme d'aproximació basat en l'aparellament perfecte òptim.
 - 4: Transformar el circuit hamiltonià obtingut a D en un recorregut per al graf G substituint les arestes que calgui per camins.
-