

Capítol 4 : Planaritat i coloració

Matemàtica discreta
Grau d'Enginyeria Informàtica
Escola d'Enginyeria
Universitat Autònoma de Barcelona

Contingut

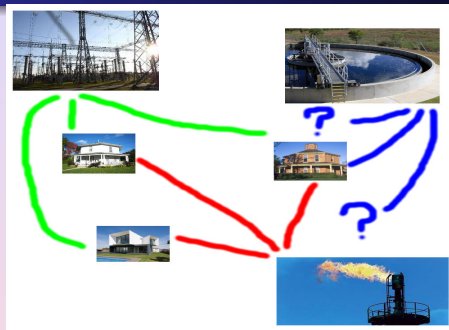
- 1 Resultats bàsics
- 2 Caracterització dels grafs planaris
- 3 Coloració de grafs planaris
- 4 Annex: el polinomi cromàtic

Contingut

[0]

- 1 Resultats bàsics
- 2 Caracterització dels grafs planaris
- 3 Coloració de grafs planaris
- 4 Annex: el polinomi cromàtic

Resultats bàsics



Suposem que tenim tres companyies de serveis (aigua, gas, electricitat) i tenim tres edificis que han de rebre els tres serveis. Si els conductes van soterrats al mateix nivell, és possible fer arribar els tres fluids als tres edificis sense que es creuin els conductes?

Resultats bàsics

Un graf simètric es diu **planari** si pot representar-se en el pla sense que hi hagi interseccions (creuaments) d'arestes. Un graf **pla** és una representació plana d'un graf planari. Habitualment, parlarem sempre de grafs plans, és a dir, els suposem representats sense que es creuin les arestes.

El problema dels subministraments és doncs equivalent a la qüestió de si $K_{3,3}$ és planari.

En un graf pla, considerem el conjunt R de regions que queden delimitades per les arestes. S'ha de tenir en compte la regió externa (infinita) que també forma part de R .

Resultats bàsics

Teorema 1 (Fórmula d'Euler).

Sigui $G(V, A)$ un graf pla, connex i amb conjunt de regions R . Aleshores es verifica:

$$|V| - |A| + |R| = 2.$$

Un graf pla pot representar un poliedre. Un **poliedre regular** o **sòlid platònic** és un poliedre on tots els vèrtexs tenen el mateix grau t i totes les cares estan limitades pel mateix nombre d'arestes h (notem que $t, h \geq 3$). Aleshores es verifica:

$$t|V| = h|R| = 2|A|.$$

Resultats bàsics

Combinant això amb la fórmula d'Euler i tenint en compte que tots els paràmetres han de ser nombres enters, s'obtenen exactament 5 solucions:

- 1 $h = 3, t = 3$. Aleshores $|V| = |R| = 4$. *Tetraedre*.
- 2 $h = 3, t = 4$. Aleshores $|V| = 6, |R| = 8$. *Octaedre*.
- 3 $h = 3, t = 5$. Aleshores $|V| = 12, |R| = 20$. *Icosaedre*.
- 4 $h = 4, t = 3$. Aleshores $|V| = 8, |R| = 6$. *Hexaedre o cub*.
- 5 $h = 5, t = 3$. Aleshores $|V| = 20, |R| = 12$. *Dodecaedre*.

A continuació, veurem algunes conseqüències de la fórmula d'Euler.

Resultats bàsics

Corol·lari 1.

Sigui $G(V, A)$ un graf pla, connex i sense llaços. Aleshores:

(i) Si $|V| \geq 3$, llavors $|A| \leq 3|V| - 6$.

(ii) Si G és bipartit i $|A| \geq 3$, llavors $|A| \leq 2|V| - 4$.

Corol·lari 2.

En tot graf pla hi ha almenys un vèrtex amb grau inferior a 6.

Caracterització dels grafs plans

En un graf simètric, una **subdivisió elemental** consisteix a substituir una aresta existent $\{x, y\}$ per dues arestes $\{x, v\}$ i $\{v, y\}$, on v és un nou vèrtex. És a dir, afegim un vèrtex “enmig” d’una aresta. Observem que aquest procés no afecta la planaritat del graf.

Si un graf G_1 pot obtenir-se a partir d’una altre G_2 fent subdivisions successives, diem que G_1 és una subdivisió de G_2 .

Caracterització dels grafs plans

Dos grafs G_1 i G_2 direm que són **homeomorfs** si tots dos són isomorfs a subdivisions (possiblement diferents) d'un mateix graf G .

Teorema 2.

Un graf és planari si, i només si, no conté cap subgraf homeomorf a K_5 o a $K_{3,3}$.

Coloració de grafs planaris

Donat un graf simètric $G(V, A)$, una **coloració** (de vèrtexs) de G és una aplicació $f: V \rightarrow C$, on C és un conjunt finit d'elements, anomenats *colors*, de forma que per a tota parella de vèrtexs $x, y \in V$, es verifica $\{x, y\} \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. És a dir que vèrtexs adjacents sempre tenen assignats colors diferents.

Si $|f(V)| = k$, diem que f és una k -coloració i G és k -colorable. Una coloració és **òptima** si utilitza el mínim nombre de colors possible.

El **nombre cromàtic** de G , denotat per $\chi(G)$, és el mínim valor tal que G és $\chi(G)$ -colorable. És a dir, una coloració òptima de G utilitza $\chi(G)$ colors.

Coloració de grafs planaris

Les següents propietats són immediates:

- (i) $\chi(K_n) = n$.
- (ii) $\chi(G) = 2$ si, i només si, G és bipartit.

El problema de determinar el nombre cromàtic d'un graf, en general, és molt difícil (és un problema intractable i NP -Completo). Curiosament però, amb grafs plans és més fàcil. Un primer resultat és el següent:

Teorema 3.

Tot graf pla G és 5-colorable, és a dir, $\chi(G) \leq 5$.

Coloració de grafs planaris

Al 1852 es va plantejar el problema de si tot mapa es pot pintar amb quatre colors. Dit d'una altra manera, si és veritat que $\chi(G) \leq 4$ per a tot graf pla G .

Després de diferents intents i algunes demostracions errònies, finalment, al 1977, Haken i Appel ho van demostrar via ordinador. Però no se'n coneix cap demostració analítica.

Annex: el polinomi cromàtic

Sigui C un conjunt de t colors. Direm que dues coloracions, $f_1 : G \rightarrow C$ i $f_2 : G \rightarrow C$ són diferents si algun vèrtex rep colors diferents, és a dir, si $f_1(x) \neq f_2(x)$ per a algun vèrtex x . Denotem per $f(G, t)$ al nombre de coloracions diferents usant C .

Remarca 1.

$$f(G, t) > 0 \iff t \geq \chi(G).$$

Annex: el polinomi cromàtic

Exemple 1.

$$f(K_2, t), f(K_4, t).$$

Lema 1.

- (i) $f(K_n, t) = t(t-1) \cdots (t-n+1) = \frac{t!}{(t-n)!}.$
- (ii) Si G és el graf nul d'ordre n , llavors $f(G, t) = t^n.$

Exemple 2.

$$f(Z_4, t).$$

Annex: el polinomi cromàtic

Donats dos vèrtexs no adjacents x, y d'un graf G , denotem per $G_{x,y}^+$ el graf G afegint-hi l'aresta x, y i denotem per $G_{x,y}^-$ el graf G sense els vèrtexs x, y i amb un nou vèrtex z que té totes les adjacències que tenien x i y , és a dir, $\Gamma(z) = \Gamma(x) \cup \Gamma(y)$.

Teorema 4.

Siguin x i y dos vèrtexs no adjacents d'un graf G . Aleshores:

$$f(G, t) = f(G_{x,y}^+, t) + f(G_{x,y}^-, t).$$

Annex: el polinomi cromàtic

Corol·lari 3.

$f(G, t)$ és un polinomi de t de grau n .

Definició 1.

$f(G, t)$ s'anomena el **polinomi cromàtic** de G .

Annex: el polinomi cromàtic

Teorema 5.

*Sigui G un graf d'ordre n , mida m i k components $G_1, \dots, G_k$.
Sigui*

$$f(G, t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$$

el seu polinomi cromàtic. Aleshores:

- (i) $f(G, t)$ és mònic: $c_n = 1$.
- (ii) $f(G, t) = \prod_{i=1}^k f(G_i, t)$.
- (iii) $c_j \neq 0 \iff j \geq k$.
- (iv) $c_{n-1} = -m$.
- (v) Si $m > 0$, llavors els coeficients tenen signes alternants i sumen 0 (cas contrari, $f(G, t) = t^n$).

Annex: el polinomi cromàtic

És a dir, el polinomi cromàtic té la forma:

$$f(G, t) = t^n - mt^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} - \dots + (-1)^{n-k}a_k t^k.$$

Remarca 2.

No tot polinomi que verifica aquestes propietats és el polinomi cromàtic d'un graf. Per exemple, el polinomi $t^3 - 4t^2 + 3t$ no és cap polinomi cromàtic.

Corol·lari 4.

*Un graf G és un arbre d'ordre n si, i només si,
 $f(G, t) = t(t-1)^{n-1}$.*