

Capítol 2 : Fonaments de grafs

Matemàtica discreta
Grau d'Enginyeria Informàtica
Escola d'Enginyeria
Universitat Autònoma de Barcelona

- 1 Definicions. Variants de grafs
- 2 Camins, circuits i distàncies
- 3 Graus i lema de les encaixades
- 4 Subgrafs i tipus importants de grafs
- 5 Seqüències gràfiques
- 6 Representació dels grafs

Un **graf simètric simple** $G(V, A)$ és un conjunt V d'elements –anomenats **vèrtexs** o **nodes**– i un conjunt A de parelles (no ordenades) de vèrtexs –anomenades **arestes**.

Normalment imaginem els grafs dibuixats en el pla, on els vèrtexs són una colla de punts i les arestes uneixen alguns d'aquests punts.

En un **graf dirigit** o **digraf**, els elements de A s'anomenen **arcs** i són parelles *ordenades* de vèrtexs.

Graf simètric vol dir que no és dirigit.

Graf simple vol dir que no hi ha arestes (o arcs) repetides (*paral·leles*) ni arestes (o arcs) que van d'un vèrtex a ell mateix (*llaços*).

Un graf que no és simple s'anomena habitualment **multigraf**.

Definicions. Variants de grafs

Resumint:

Multigraf dirigit: A és un multiconjunt de parelles ordenades de vèrtexs.

Graf simple dirigit: A és un conjunt de parelles ordenades de vèrtexs i $(x, y) \in A \Rightarrow x \neq y$.

Multigraf simètric: A és un multiconjunt de parelles no ordenades de vèrtexs.

Graf simple simètric: A és un conjunt de parelles no ordenades de vèrtexs i $\{x, y\} \in A \Rightarrow x \neq y$.

Si no es diu el contrari,

quan diem *graf*, ens referim a graf simètric simple.

L'**ordre** d'un graf és el nombre de vèrtexs.

La **mida** d'un graf és el nombre d'arestes (arcs si fos un graf dirigit).

Suposarem sempre grafs *finit*s, és a dir, d'ordre (i mida) finit.

Un **camí** és una seqüència ordenada d'arestes (o arcs) on el vèrtex final d'una aresta (o arc), que no sigui l'última, és l'inicial de la següent.

La **longitud** d'un camí és el nombre d'arestes o arcs que té.

Un vèrtex y és **accessible** des d'un vèrtex x si hi ha un camí que comença a x i acaba a y .

Un graf simètric és **connex** si hi ha camí entre qualsevol parella de vèrtexs. En cas contrari, diem que és disconnex.

Si un graf és disconnex, podem descompondre'l en trossos que seran **components** connexos. És com si el graf estigués format per grafs més petits.

Un **circuit** o **cicle** és un camí que comença i acaba en un mateix vèrtex, és a dir, és un camí tancat.

Un graf que conté algun circuit es diu **cíclic**.

En cas contrari, es diu **acíclic**.

La **distància** entre dos vèrtexs x i y , $d(x, y)$ és la longitud del camí més curt possible entre x i y .

El **diàmetre** d'un graf és $\max\{d(x, y) \mid x, y \in V\}$.

Sigui $G(V, A)$ un graf dirigit i sigui $x \in V$.

El conjunt de **successors** del vèrtex x és

$$\Gamma(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in A\}.$$

El conjunt d'**antecessors** del vèrtex x és

$$\Gamma^{-1}(x) = \{z \in V \mid (z, x) \in A\}.$$

El **grau exterior** de x és $|\Gamma(x)|$.

El **grau interior** de x és $|\Gamma^{-1}(x)|$.

En un graf simètric, usarem només $\Gamma(x)$ i serà el conjunt de vèrtexs **adjacents** a x o **veïns** de x .

Direm **grau** de x al nombre de veïns que té.

Un graf és **k -regular** o de **valència** k si tots els vèrtexs tenen grau k .

Lema 1 (de les encaixades).

Sigui $G(V, A)$ un graf, aleshores:

(i) Si G és simètric, llavors $\sum_{x \in V} |\Gamma(x)| = 2|A|$.

(ii) Si G és dirigit, llavors $\sum_{x \in V} (|\Gamma^{-1}(x)| + |\Gamma(x)|) = 2|A|$.

Corol·lari 1.

En tot graf el nombre de vèrtexs de grau senar és sempre parell.

Subgrafs i tipus importants de grafs

Un **subgraf** $G'(V', A')$ d'un graf $G(V, A)$ és un graf on $V' \subseteq V$ i $A' \subseteq A$.

Direm que G' és el **subgraf induït** per V' si A' conté totes les arestes de A incidents amb vèrtexs de V' .

El subgraf $G'(V', A')$ d'un graf $G(V, A)$ és **maximal** respecte del conjunt de vèrtexs i d'una certa propietat $\mathcal{P}$ si G' verifica $\mathcal{P}$ i no existeix cap altre subgraf $G''(V'', A'')$ de G que verifiqui $\mathcal{P}$ i tal que $V' \subsetneq V''$.

Subgrafs i tipus importants de grafs

Similarment es definiria per al cas **minimal** i per al cas d'arestes i no vèrtexs.

Així, un **component connex** d'un graf G és un subgraf maximal connex de G .

Un graf **nul** és aquell que no té arestes.

Un graf $G(V, A)$ és **complet** si té totes les arestes possibles.

El graf complet d'ordre n es representa per K_n , és $(n - 1)$ -regular i el seu nombre d'arestes és $n(n - 1)/2$.

Tot graf d'ordre $n' \leq n$ pot considerar-se un subgraf de K_n .

El graf **complementari** $\overline{G}(V, \overline{A})$ corresponent a un graf $G(V, A)$ és el que té com a arestes totes aquelles que li falten a G per a ser un graf complet.

Subgrafs i tipus importants de grafs

Un graf $G(V, A)$ es diu **bipartit** si podem particionar V en dos subconjunts $V = V_1 \cup V_2$ de forma que $\{x, y\} \in A$ implica $x \in V_1, y \in V_2$; o bé $x \in V_2, y \in V_1$.

G és **bipartit complet** si $u \in V_1, v \in V_2 \Rightarrow \{u, v\} \in A$.

Si $|V_1| = t$ i $|V_2| = s$, llavors G es denota per $K_{t,s}$. La seva mida és $|A| = st$.

Proposició 1.

Un graf és bipartit si i només si tots els seus circuits tenen longitud parella o bé no hi ha circuits.

Subgrafs i tipus importants de grafs

Un **arbre** (simètric) és un graf (simètric) connex i acíclic. Equivalentment, un graf és un arbre si per a cada parella de vèrtexs hi ha exactament un camí entre els dos.

Dos grafs $G_1(V_1, A_1)$ i $G_2(V_2, A_2)$ són **isomorfs** si existeix una bijecció

$$f : V_1 \longrightarrow V_2$$

entre els dos conjunts de vèrtexs que preserva les adjacències:

$$\{x, y\} \in A_1 \iff \{f(x), f(y)\} \in A_2,$$

per a tots $x, y \in V_1$.

Si dos grafs G_1 i G_2 són isomorfs i no estan *etiquetats*, aleshores els considerem **idèntics**.

Un conjunt de nombres enters no negatius $S = \{d_1, \dots, d_n\}$ s'anomena **seqüència gràfica** si existeix algun graf d'ordre n tal que S és la seqüència de graus del graf.

Teorema 1 (Havel-Hakimi).

Una seqüència $d_1, \dots, d_n$, on $d_1 \geq \dots \geq d_n$, és gràfica si i només si la seqüència $d'_2, \dots, d'_n$ és gràfica, on $d'_i = d_i - 1$ si $i \leq d_1 + 1$ i $d'_i = d_i$, altrament.

Podem aplicar repetidament la propietat i anirem reduint la seqüència.

Ens aturarem si veiem clarament que la seqüència actual és gràfica, per exemple la seqüència tot zeros.

No és gràfica si:

- (i) Algun $d_i > n - 1$, al principi.
- (ii) Algun d_i esdevé negatiu.
- (iii) El nombre de graus senars no és parell.

L'algorisme té una complexitat $O(n^2)$.

Hi ha paquets de programari especialitzats en grafs.

Bàsicament es poden representar els grafs com a llista d'adjacències o bé utilitzant la matriu d'adjacència.

A partir de $G(V, A)$, on $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, la **matriu d'adjacències** de G és:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n},$$

on $a_{ij} = 1$ si v_i i v_j són adjacents. Cas contrari, $a_{ij} = 0$.

Remarca 1.

- (i) A és una matriu de binària (zeros i uns) i quadrada (n files i n columnes).*
- (ii) A la diagonal d' A hi ha tot zeros, si bé en alguns casos interessa posar-hi uns.*
- (iii) És una matriu simètrica; per tant, només cal guardar la meitat de les n^2 posicions. En qualsevol cas, l'espai ocupat serà $O(n^2)$.*